УДК 621.374

СИНТЕЗ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ГЕНЕРАТОРОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Ю.К. Рыбин

Томский политехнический университет
E-mail: policom@policom.raden.epd.tpu.edu.ru

Периодические сигналы широко используются в измерительной технике в качестве тестовых сигналов, в медицине в качестве стимулов, в строительной индустрии при акустических испытаниях строительных конструкций, в промышленности при испытаниях механизмов и машин и т.д. Известны и широко применяются приборы и устройства для их воспроизведения — генераторы периодических сигналов. Развиты и методы построения автоколебательных систем генераторов для воспроизведения периодических колебаний простейших форм. Тем не менее, задача синтеза математических моделей автоколебательных систем до конца ещё не решена. В статье рассматривается метод стационарных автоколебаний, на основе которого несложно построить систему уравнений, решением которой являются колебания заданной формы.

Введение

Периодические электрические сигналы с предписанной (заданной) формой используются в измерительной технике для питания различных датчиков физических величин, измерения передаточных характеристик четырёхполюсников. Они применяются в метрологической практике при поверке средств измерений параметров переменных напряжений, в медицине для кардиостимуляции, в автоматике для создания программных движений, в строительстве при виброиспытаниях различных конструкций и т.д. Поэтому проблема получения сигналов с заданной формой или с заданным спектром продолжает оставаться актуальной. Для решения этой проблемы развиваются два способа: *аналоговый* и *цифровой*. Аналоговый способ основан на формировании сигналов непрерывной динамической системой, а цифровой базируется на воспроизведении сигналов дискретной динамической системой. К достоинствам первого способа относят практически неограниченный диапазон частот, а к преимуществам второго – простоту воспроизведения сигналов сложных форм. Проблема создания динамической системы с заданным поведением имеет не только прикладное, но и самостоятельное теоретическое значение в теории колебаний. Для решения указанной проблемы можно использовать метод локализации [1], метод управления по производной [2] и др. В работе [3] автором предложен метод синтеза автоколебательных систем с заданной синусоидальной формой колебаний в стационарном режиме. Этот метод назван методом стационарных автоколебаний. Далее этот метод применяется для синтеза систем, воспроизводящих периодические колебания других форм.

Постановка задачи исследований

Метод стационарных автоколебаний основан на том, что в динамической системе второго порядка

$$\ddot{x} + F(x) = g(\dot{x}, x), \qquad (1)$$

где $\ddot{x} = \dfrac{d^2(\cdot)}{dt^2}$ – линейный дифференциальный оператор, $F(\cdot)$ – нелинейный оператор, $g = \left(\dfrac{d(\cdot)}{dt}, \cdot\right)$ – стабилизирующий оператор при определенных ограничениях на F и g возможны периодические автоколебания со строго заданной формой. Эти ограничения сводятся к выполнению следующих равенств

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_{\text{ст}} + F(x_{\text{ст}}) = 0, \\ &g(\dot{x}_{\text{ст}}, x_{\text{ст}}) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

где $x_{\text{ст}}(t)$ – заданная форма стационарных колебаний.

Первое уравнение описывает консервативную (по А.А. Андронову [4]) колебательную систему, а второе уравнение – управляющую систему. На рис. 1 показана блок-схема динамической системы (1).

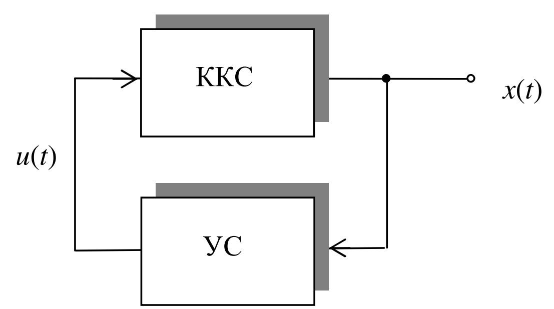


Рис. 1. Блок-схема автоколебательной системы

Верхний блок (консервативная колебательная система – ККС) отображает действие первого уравнения системы (2), а нижний (управляющая система – УС) – действие второго уравнения. При таком представлении в одной из связей появляется сигнал который в неявной форме присутствует в математическом описании системы (1). Этот сигнал формируется управляющей системой. Если колебания в консервативной системе находятся вне стационарного режима, то управляющая система создаёт такое управляющее воздействие $u(t)$ под действием которого колебания стремятся к стационарному режиму. Как только система входит в режим, которому соответствуют периодические стационарные колебания $x_{\text{ст}}(t)$, сигнал управления $u(t)$ становится равным нулю, и управление прекращается. При таком подходе требуемая форма колебаний определяется консервативной частью системы, а управляющая система обеспечивает лишь установление стационарного режима и парирует возможные отклонения от него. В этом состоит основное и принципиальное отличие предлагаемого метода от метода управления по производной и метода локализации. Ниже проводится результаты формализованного синтеза ур. (1).

Основные результаты

Рассмотрим возможности реализации колебательных систем (1) с предписанной формой колебаний. Первое уравнение системы (2) представляет собой уравнение консервативной колебательной системы. Для него известно [5], что если существует вторая производная $x(t)$ и выполняется условие

$$x \cdot F(x) > 0 \text{ или } x \cdot \ddot{x} < 0 \text{ при } x \neq 0, \qquad (3)$$

то оно имеет однопараметрическое семейство периодических решений $x = x_{\text{ст}}(t)$. Задача построения консервативной части уравнения колебательной системы сводится к нахождению выражения для функции $F(x)$. Рассмотрим несколько методов нахождения этой функции.

В начале рассмотрим метод, основанный на представлении $F(x)$ в виде степенного многочлена [6]. Условию (3) удовлетворяют нечётные однозначные функции $F(x)$, для которых допустимо разложение $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} x^{2k-1}$. При этом периодическое решение $x_{\text{ст}}(t)$ может быть представлено бесконечным рядом Фурье. В общем случае полученная функция $x_{\text{ст}}(t)$ может иметь особенности в точках, кратных $T/2$. Поэтому для построения уравнения динамической системы $x_{\text{ст}}(t)$ необходимо сглаживать, например, ограничивая ряд конечным числом членов разложения N в ряд Фурье, т.е.

$$x^*_{\text{ст}}(t) = \sum_{k=1}^{N} b_{2k-1} \sin\left[\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right].$$

Тогда, удерживая в выражении для F то же N членов разложения, получим

$$\ddot{x}^*_{\text{ст}}(t) + F[x^*_{\text{ст}}(t)] = -\sum_{k=1}^{N} b_{2k-1}\left(\frac{2\pi}{T}(2k-1)\right)^2 \times$$
$$\times \sin\left[\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right] + \sum_{j=1}^{N} c_{2k-1} \cdot x^{2j-1}_{\text{ст}}(t).$$

Очевидно, что

$$x^{2j-1}_{\text{ст}}(t) = \hat{x}^{2j-1}_{\text{ст}}(t) + r(t),$$

где $r(t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} b_{2k-1} \sin\left[\dfrac{2\pi}{T}(2k-1)t\right]$ – остаточный член. Откуда

$$\ddot{x}^*_{\text{ст}}(t) + F[x^*_{\text{ст}}(t)] = \sum_{k=1}^{N} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right) \times$$
$$\times \left\{\sum_{j=1}^{N} c_{2j-1} b_{2k-1,2j-1} - \left(\frac{2\pi}{T}(2k-1)\right)^2 b_{2k-1}\right\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} c_{2j-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} b_{2k-1,\,2j-1} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right).$$

Если c_{2j-1} определить из условия равенства нулю выражения в фигурных скобках, т.е. эти коэффициенты считать решением системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{N} c_{2i-1} b_{2k-1,\,2j-1} - \left(\frac{2\pi}{T}(2k-1\right)^2 b_{2k-1} = 0, \quad k = \overline{1, N}, \qquad (4)$$

то получим уравнение

$$\ddot{x}_{\text{ст}}(t) + F[x_{\text{ст}}(t)] = R(t), \qquad (5)$$

в котором $R(t) = \sum_{j=0}^{N} c_{2j-1}\{[x^{2j-1}_{\text{ст}}(t) - \hat{x}^{2j-1}_{\text{ст}}(t)]$ тем ближе к нулю, чем больше N^*, при котором правой частью уравнения (5) можно пренебречь. Число удерживаемых

членов N^* выбирается из условия минимизации невязки между решением однородного уравнения (1) при начальных условиях

$$x_{\text{ст}}(0)=0,\ \dot{x}_{\text{ст}}(0)=\sum_{k=1}^{N^*} b_{2k-1}\cdot\left[\frac{2\pi}{T}(2k-1)\right] \text{ и}$$

$$x^*_{\text{ст}}(t)=\sum_{k=1}^{N^*} b_{2k-1}\cdot\sin\left[\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right].$$

При этом $F(x)=\sum_{k=0}^{N^*} c_{2k-1}\cdot x^{2k-1}$ и уравнение консервативной части принимает вид

$$\ddot{x}_{\text{ст}}(t)+\sum_{k=1}^{N^*} c_{2k-1}\cdot[x_{\text{ст}}(t)]^{2k-1}\cong 0. \quad (6)$$

В ряде случаев, при сложной форме заданных к синтезу колебаний, когда N^* велико, функция $F(x)$ может описываться степенным полиномом высокой степени, тогда в качестве стационарного колебания можно принять первую или вторую производную некоторой вспомогательной функции $z_{\text{ст}}(t)$, такой что требуемая форма определяется либо её первой $x_{\text{ст}}(t)=\dot{z}_{\text{ст}}(t)$, либо второй производной $x_{\text{ст}}(t)=\ddot{z}_{\text{ст}}(t)$.

Рассмотрим метод построения функции $F(x)$ в виде разложения по многочленам Чебышева.

Пусть заданное колебание содержит только чётные гармонические составляющие, т.е. является решением вида

$$x_{\text{ст}}(t)=\sum_{k=1}^{N} a_k\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right).$$

Подставляя это решение в первое уравнение системы (2), получим

$$-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2\pi}{T}k\right)^2 a_k\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)+F\left[\sum_{k=1}^{N} a_k\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right]=0.$$

Учитывая, что тригонометрические функции можно представить через многочлены Чебышева, имеем уравнение,

$$-\sum_{k=1}^{N}\omega^2k^2a_k\cdot T_k(x)+F\left[\sum_{k=1}^{N} a_k\cdot T_k(x)\right]=-w(x)+F[v(x)]=0, \quad (7)$$

где $x=\cos\frac{2\pi}{T}t=\cos\omega t.$

Полученное уравнение по известным $w(x)$ и $v(x)$ позволяет определить функцию F, например, посредством интерполяции степенными многочленами или сплайнами зависимости $w(x)=F[v(x)]$.

Теперь рассмотрим второе уравнение системы (2), которое представляет собой уравнение управляющей системы. Найдём его вид в общем случае из уравнения консервативной части, для чего представим его в виде системы.

$$\begin{cases}\dot{y}=-F(x),\\ \dot{x}=y.\end{cases}$$

Как известно [4], эта система имеет первый интеграл

$$C=\frac{y^2}{2}+G(x), \quad (8)$$

где $G(x)=\int_0^x F(s)ds$, C – постоянная интегрирования.

Известно также, что первый интеграл остаётся постоянным вдоль каждого из решений системы. На фазовой плоскости первому интегралу уравнения консервативной системы соответствует семейство (континуум) вложенных друг в друга замкнутых линий (траекторий). Для этого функция $G(x)$ должна иметь глобальный минимум [4]. При этом замкнутым линиям соответствует особая точка типа "*центр*". В континууме траекторий одна из них соответствует заданному стационарному периодическому колебанию $x_{\text{ст}}(t)$. Отклонение от этой траектории (при определённом C)[1] или иначе переход на другую траекторию меняет значение первого интеграла. Фактически константа C задаёт параметры колебания: его амплитуду и частоту. При конкретном значении C переход на другую траекторию приводит к нарушению равенства (8). Возникает разность между левой и правой частью (8). Знак и значение этой разности зависит от отклонения от заданной траектории, т. е. от стационарного колебания $x_{\text{ст}}(t)$. Это свойство первого интеграла используется для управления колебаниями. Ведь ясно, что параметры соответствующих колебаний консервативной системы зависят от начальных условий и при малейшем их изменении существенно меняются. Для независимости параметров колебаний от начальных условий или воздействия возмущений и превращения их в автоколебания необходимо особую точку системы "*центр*" превратить в "*фокус*", причём так, чтобы на стационарной траектории ур. (8) превращалось в тождество. Для превращения "*центра*" в "*фокус*", введём инкрементную составляющую. Таким образом, дифференциальное уравнение метода стационарных автоколебаний можно представить в виде

$$\ddot{x}+F(x)=\varepsilon\,\dot{x}[C-(\dot{x})^2/2-G(x)], \quad (9)$$

где ε – коэффициент (малый параметр).

Это уравнение позволяет строить динамические автоколебательные системы при заданной форме колебаний $x_{\text{ст}}(t)$, заданной аналитической функции $F(x)$ или при заданном спектральном составе колебания.

Практика применения изложенной методики к синтезу колебательных систем (1) показывает, что условия (3), налагаемые на функцию $F(x)$, являются очень сильными и приводят к существенным ограничениям класса воспроизводимых колебаний. Например, если заданное к синтезу колебание имеет на половине периода значения второй производной равные нулю при $x\neq 0$, то такие колебания не удовлетворяют ур. (3). Например, при построении колебательной системы для генерирования колебаний, содержащих первую и третью гармоники $x_{\text{ст}}(t)=\alpha\sin(t)+\beta\sin(3t)$, воспроизводимыми могут быть колебания удовлетворяющие неравенству $\beta/\alpha<0{,}3$. По существу, неравенства (3) ограничивают класс воспроизводимых колебаний такими, которые имеют на фазовой плоскости только один *центр*. Одна-

[1]Константа C находится путём интегрирования первого слагаемого (8) за период колебаний.

ко изложенную методику можно распространить и на случай, когда особых точек типа *центр* может быть больше одной и, соответственно, класс воспроизводимых колебаний может быть существенно расширен. Важно только, чтобы на самом предельном цикле не было особых точек и, чтобы стационарная фазовая траектория охватывала бы все частные замкнутые циклы, соответствующие особым точкам.

Ниже приведены нетривиальные примеры применения уравнения (9) для синтеза автоколебательных систем, подтверждающие сказанное.

Пусть к синтезу задано колебание, $x_{ст}(t)$= =–1,4α sin(t)+3,2β sin^3(t) график которого показан на рис. 2, *а* в виде линии $x(t)$, а его вторая производная – на рис. 2, *б*. Как видно, вторая производная этого колебания равна нулю при $x\neq0$ в точках $t=\pi/3$, $t=2\pi/3$ и др. При этом не выполняется условие (3). Более того, функция $F(x)$ оказывается неоднозначной. Общие вопросы построения автоколебательных систем с такими функциями ещё не решены.

Поэтому примем, что $x_{ст}(t)=\ddot{z}(t)$, где $z(t)$ – некоторое вспомогательное колебание (на рис. 2, *а* оно показано пунктиром). Тогда, выполняя все операции синтеза, получим по формулам (4) выражение для функции $F(z)\cong-1,9z+9,57z^3+21,32z^5+44,02z^7-$ $-64,05z^9+57,89z^{11}-28,76z^{13}+5,96z^{15}$.

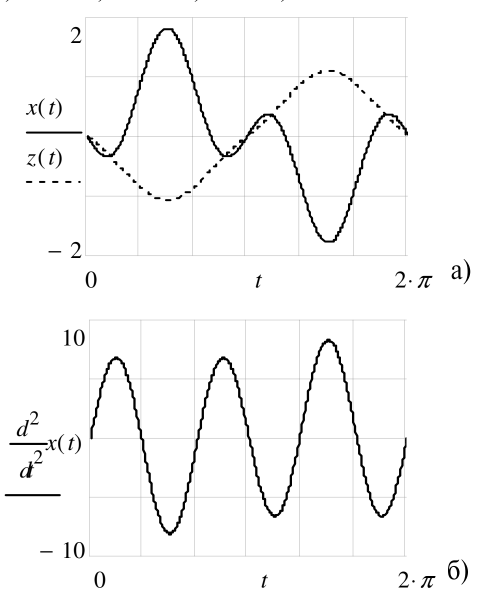


Рис. 2. *Графики а) заданного к синтезу сигнала и б) его второй производной*

На рис. 3 показан график функции $F(z)$ (рис. 3, *а*), а так же график погрешности воспроизведения колебаний (рис. 3, *б*). Видно, что погрешность не превышает 1 %, что считается приемлемым для задач синтеза.

Фазовые портреты возбуждения автоколебаний представлены на рис. 4.

Видно, что в данной системе имеет место случай двух особых симметричных точек типа "*центр*". Видно так же, что введение в управляющее воздействие инкремирующе – демпфирующих составляющих привело к превращению "*центров*" в "*фокусы*", в результате чего колебания из областей особых точек приходят на стационарную траекторию.

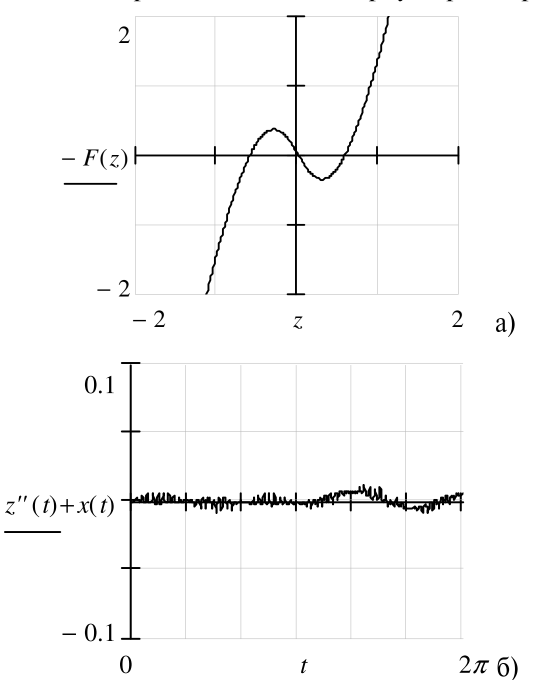


Рис. 3. *Графики: а) функции F(z) и б) погрешности воспроизведения колебаний*

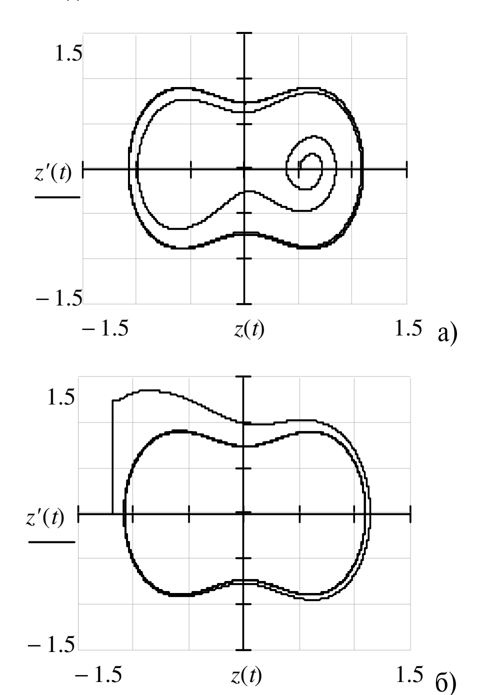


Рис. 4. *Фазовые портреты установления автоколебаний при начальных условиях а) внутри и б) вне стационарного предельного цикла*

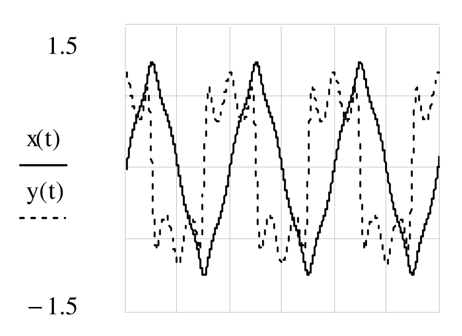
Приведём ещё один пример применения метода стационарных автоколебаний к синтезу с заданной функцией $F(x)$, например, в виде

$$F(x)=16x^5-20x^3+5x=T_5(x),$$

описываемой многочленом Чебышева пятого порядка.

В этом случае ур. (9) принимает следующий вид

$$\ddot{x} + 16x^5 - 20x^3 + 5x =$$
$$= \varepsilon \cdot \dot{x}\left[1 - (\dot{x})^2 - 2\left(16\frac{x^6}{6} - 20\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^2}{2}\right)\right]. \quad (10)$$



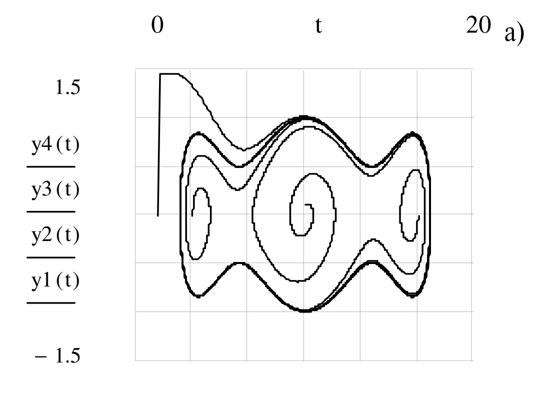


Рис. 5. *Графики: а) стационарного решения уравнения (10) и б) фазовые портреты при разных начальных условиях*

На рис. 5 представлено решение ур. (10) и фазовые траектории при разных начальных условиях. Из графиков видно, что здесь имеет место случай трёх "*центров*". Тем не менее, все траектории после переходного процесса выходят на стационарную траекторию – предельный цикл. В зависимости от постоянной *C* и начальных условий здесь возможны траектории, охватывающие каждую из особых точек или все три. Уравнение метода стационарных автоколебаний (9) позволяет строить динамические системы и с заданным спектральным составом.

Приведём пример синтеза автоколебательной системы для воспроизведения колебания с заданным спектром, например, содержащего первую, вторую и третью гармоники с амплитудами a_k равными единице

$$x_{cm}(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \cdot \cos(kt) = \ddot{z}(t).$$

Для такого колебания функции $w(x)$ и $v(x)$ имеют вид

$$w(x) = a_3(4x^3 - 3x) + a_2(2x^2 - 1) + a_1 x = \ddot{z}(t),$$

$$v(x) = a_3\frac{4x^3 - 3x}{9} + a_2\frac{2x^2 - 1}{4} + a_1 x = z(t), \text{ где } x = \cos t.$$

На рис. 6 приведены графики заданного к синтезу сигнала и функции $F(x)$.

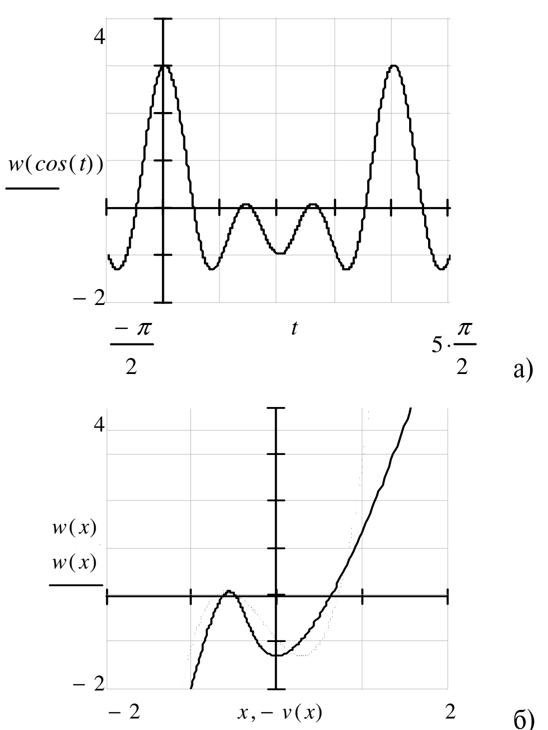


Рис. 6. *Графики: а) заданного к синтезу сигнала содержащего три первые гармоники с амплитудами $a_1=a_2=a_3=1$ и б) функции F*

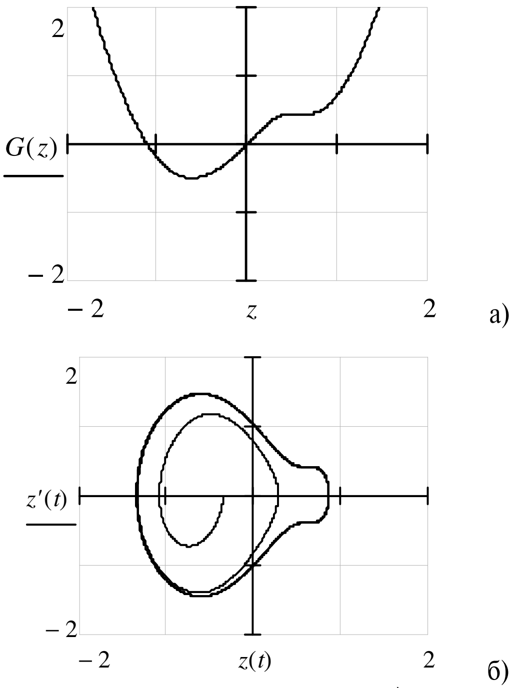


Рис. 7. *Функция потенциальной энергии а) и фазовый портрет системы б)*

На рис. 7 показан график функции потенциальной энергии $G(z)$ и фазовый портрет системы. Из графика видно, что функция $G(z)$ имеет глобальный минимум и, следовательно, консервативная система должна иметь континуум циклов. Фазовый портрет позволяет сделать вывод о том, что в динамической системе (9) с нелинейной функцией $F(z)$,

показанной на рис. 7, *б*, один из циклов превращается в предельный цикл системы и все траектории стремятся к нему.

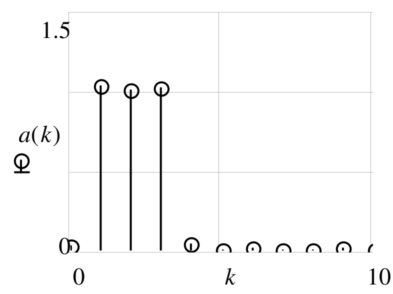


Рис. 8. *Спектр колебаний в системе*

На рис. 8 показан спектр автоколебания. Видно, что спектр, также как и заданный к синтезу, содержит три первые гармоники, амплитуды которых практически равны единице с погрешностью, не превышающей 4 %. Эта погрешность, а так же наличие высших гармоник малой амплитуды при $k>3$ обусловлены неточной аппроксимацией функции F.

В частном случае, когда заданная форма сигнала синусоидальная, т.е. $x_{\text{ст}}(t)=\sin\frac{2\pi}{T}t=\sin\omega_{\text{о}}t$, функция $F(x)=\omega_0^2x$, тогда ур. (9) превращается в уравнение

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\text{e}\,\omega_0\dot{x}[1-(\omega_0\dot{x})^2-x^2],$$

которое имеет решения в виде синусоидальных колебаний.

Заключение

Таким образом, создан эффективный метод синтеза автоколебательной системы с заданной формой колебаний и заданным спектром. Метод нашёл применение при синтезе автоколебательных систем генераторов электрических сигналов. Его можно применить при синтезе стимулов в медицине, программных движений механических систем и в других случаях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования. – М.: Высшая школа, 2004. – 365 с.
2. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. – М.: Энергия, 1971. – 100 с.
3. Рыбин Ю.К. Синтез генераторов синусоидальных колебаний. // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 27. – № 9. – С. 1793–1797.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
5. Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 318 с.
6. Рыбин Ю. К., Барановский А. Л. Синтез динамической системы со стохастическими автоколебаниями // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т. 33. – № 8. – С. 1643–1651.

УДК 681.513.3